Nemlineáris Parciális Differenciálegyenletek Létezési Módszerei

A doktori értekezés tézisei

Csirik Mihály András

Témavezető:
Simon László
MTA Doktora

Eötvös Loránd Tudományegyetem
Matematika Doktori Iskola

Vezető:
Faragó István
MTA Doktora

Alkalmazott Matematika Program

Vezető:
Karátson János
MTA Doktora

Az értekezés az ELTE Alkalmazott Analízis Tanszékén készült.

2018

1. Bevezetés

Az alábbiakban rövid áttekintést adunk a szerző értekezésében foglaltakról. Az anyag összetettsége miatt a technikai részleteket mellőzzük, és csak a főbb eredményekre koncentrálunk, azokat viszont precízen kimondjuk.

A matematikai analízis nyilánvalóan a klasszikus fizikából ered. A két tudományterület közötti kölcsönhatás az analízis több fontos módszerének megszületéséhez vezetett. A fizika a mai napig fontos inspiráló erő a matematikai elméletek fejlesztésénél. Ezért érdemes a matematikusoknak közvetlenül tanulmányozniuk a fizikai modelleket. Igen gyakran ezeket a modelleket még megfogalmazni is nehéz matematikailag precíz módon, és kifinomult eszközök szükségesek a vizsgálatukhoz.

Jelen értékezés fő motívum a nemlineáris analízis. A nemlineáris analízis javarészt a közönséges-, és a parciális differenciálegyenletek létezés, egyértelműségi és multiplicitási kérdéseit vizsgálja (lásd pl. [13, 23, 1]). Az értekezésben három igen különböző feladatot tárgyalunk.

Az értekezés **2. fejezetében** összegyújtjük a szükséges fogalmakat és eredményeket.

Az értekezés **3. fejezetében** új eszközöket fejlesztünk ki a kritikus pont elméletben, és a p-Laplace operátorra vonatkozó nemlineáris sajátértékfeladatra alkalmazzuk őket. A kritikus pont elmélet az analízis igen fejlett ága, számos alkalmazással a közönséges differenciálegyenletek, a parciális differenciálegyenletek, a differenciálgeometria és az optimalizáció területein (lásd pl. [13, 23, 1, 17]). Durván szólva azt mondhatjuk, hogy a kritikus pont elmélet függvénytereken értelmezett funkcionálok szélsőértékhelyeivel és nyeregpontjaival foglalkozik, többnyire valamilyen alkalmas deriváltfogalom felhasználásával. Nyilván a legegyszerűbb ilyen fogalom a Gateaux-derivált: ha a funkcionál Gateaux-differenciálható, akkor "sima" kritikus pont elméletről beszélünk.

A kritikus pont elmélet "nemsima" variánsának kiépítését Chang kezdeményezte 1981-ben [5]. Ő Ambrosetti és Rabinowitz [2] ill. Rabinowitz [20] minimum-, és minimax-elveit kiterjesztette a lokálisan Lipschitz funkcionálok esetére, majd alkalmazta ezeket az elméleti eredményeket olyan parciális differenciálegyenletek tanulmányozására, amelyek szakadásos nemlinearitásokkal rendelkeznek. Lásd az értekezés 3.1. szakaszát néhány további hivatkozásért.

A mi kiindulópontunk Martin Schechter C^1-funkcionálokra érvényes *korlátos* kritikus pont elmélete (lásd [21] és a közérthetőbb [22] monográfiát). Schechter legelemibb eredményei a funkcionál egy rögzített gömbön belüli kritikus pontjaival foglalkoznak, azaz *korlátos* normájú kritikus pontokkal. Mint az várható, bizonyos, a funkcionálra vonatkozó "peremfeltételek" lesznek relevánsak ((3.14) az értekezésben). Az elmélet egy "deformációs lemmának" nevezett technikai eredményből épül fel (3.3.1. Tétel az értekezésben), amelyből különböző minimum és mountain pass-tételeket vezetünk le (3.4.3 Tétel az értekezésben, illetve lásd Jabri [16] nagyszerű monográfiáját). Ezeket az eredményeket a szokott módon, egy megfelelő kompaktsági feltevéssel kombinálva (3.4. Definíció) megkapjuk a minimalizáló elemek (3.6.3. Tétel az értekezésben) illetve a "nyeregpontok" (3.5. Tétel) létezését. Ezeket az eredményeket egy kellően általános, "linking" viszonynak nevezett szituációban fogalmazzuk meg: létezik két halmaz a függvénytérben, amelyeket "nem lehet széthúzni egymás metszése nélkül" és a funkcionál helyettesítési értékeit az egyik halmazon dominálják a másik halmazon vett a helyettesítési értékei (3.1. Definíció). Azért hasznos bevezetni ezt a fogalmat, mert a "linking" halmazok alkalmas megválasztása segít kihasználni az alkalmazásokban előkerülő konkrét funkcionálok szimmetriatulajdonságait.

Összefoglalva, általánosítjuk Schechter néhány, csak Hilbert-terekben ismert eredményét Banach-terekre; és ami még fontosabb, megengedünk lokálisan Lipschitz funkcionálokat is, és nem csak C^1-osztályúakat. Más szóval, kiterjesztjük Schechter eredményeit a "nemsima" esetre. Minthogy egy lokálisan Lipschitz funkcionál alkalmas értelemben vett differenciálja általában halmazértékű leképezés, bizonyos feltevések és relációk sokkal bonyolultabbak lesznek. Például a sajátértéki egyenlet egy ún. differenciálinklúzió lesz (3.5. Tétel). Egy "játék" alkalmazás gyanánt a p-Laplace operátor nemlineáris sajátértékfeladatát fogjuk tekinteni (az értekezés 3.7. szakasza). A p-Laplace operátort sokat tanulmányozták a nemlineáris analízisben, lásd Drabek [12] cikkét egy könnyen érthető bemutatkozásért. Az eredményeink kiterjesztik Schechter eredeti munkáját, amely a szokásos Laplace-operátorra és egy C^1-osztályú nemlineritásra vonatkozik, a p-Laplace operátor és egy lokálisan Lipschitz nemlinearitás esetére (3.9. Tétel) Az értekezés 3. fejezetének módszerei elviekben kiegészíthetőek egy sokkal teljesebb elméletté – mi mindössze bemutatjuk, hogy lehetséges Schechter elméletének nemsima kiterjesztése.

Az értekezés **4. fejezetében** megfogalmazunk egy nagyon általános rugalmasságtani feladatot, és az ún. bipotenciál-módszer segítségével alkalmazhatóvá válik egy megoldhatósági tétel a hemivariációs egyenlőtlenségek elméletéből, hogy igazoljuk a feladat gyenge megoldásának létezését. A feladat egy rugalmas test és egy akadály közti értintkezés egyensúlyi állapotát írja le. Az első ilyen típusú feladat a Signorini-feladat volt, amelyre a gyenge megoldás egyértelmű létezését Fichera igazolta [14]. A fő nehézség abban áll, hogy nem szokványos peremfeltételeket kell kiróni, amely abból a kényszerből származik, hogy a test ne hatoljon bele az akadályba. A Signorini-feladat gyenge alakja egy ún. variációs egyenlőtlenség, amelyeket azóta már szisztematikusan tanulmányoznak. Tény, hogy az ilyesfajta ún. kontakt feladatoknak általában nincs erős megoldása.

A Signorini-feladatban szereplő, fizikailag viszonylag érdektelen, *lineáris* anyagtörvény helyett (Hooke-törvény), a kutatók később általánosabb, nemlineáris anyagtörvények kezelésével foglalkoztak. A szóban forgó, a feszültségtenzor és a Cauchy-féle deformációs tenzor között fennálló reláció a gyakorlatban igen komplikált lehet, amely szükségessé teszi a konvex analízis eszközeinek használatát. Továbbá, még bonyolultabb peremfeltételeket is tekinthetünk, amelyek kezelése már a ”nemsima” analízis technikáit igényli. Ezeket *nemmonoton* peremfeltételeknek nevezik. Az eddigi irodalomról rövid összefoglalást tartalmaz az értekezés 4.1. szakasza.

Vizsgálatunk kulcsfontosságú eszköze a de Saxcé & Feng [10] által bevezetett *bipotenciál-módszer* (4.3. Definíció). A megközelítésünk újszerűsége abban áll, hogy lehetővé teszi a nemmonoton peremfeltételek kezelését. Átfogalmazzuk a feladat gyenge alakját a bipotenciál segítségével, illetve egy primál-duál variációs feladat alakjában. Megmutatjuk, hogy ez a két megfogalmazás egyenértékű (az értékezés 4.4.1. Állítása). Ezután igazoljuk a gyenge feladat megoldhatóságát (az értekezés 4.4.2. Tétele). Ehhez Costea és Varga [8] egy viszonylag új, hemivariációs egyenlőtlenségek megoldhatóságára vonatkozó eredményére támaszkodunk (az értekezés 2.5.1. Tétele). A megközelítésünk igen általános anyagtörvények és peremfeltételek figyelembevételét teszi lehetővé, és meg is adunk egy sor konkrét példát ezekre az értekezés 4.2. szakaszában.

Az értekezés **5. fejezetében** igazoljuk egy nemkorlátos tartományon értelmezett, nemlineáris, *nemlokális* elliptikus parciális differnciálegyenlet gyenge megoldásának létezését. Nemlokális alatt itt azt értjük, hogy az operátorban szereplő együtthatófüggvények az *egész* megoldástól függhetnek, és nem csak a lokális mennyiségektől, mint például az adott pontbeli helyettesítési értékektől. Ezt *funkcionális függésnek* is nevezik. Ilyen nemlokális függés számos modellben felbukkan [19, 11, 18]. További nemlokális függést tartalmazó feladatok: egy plazmafizikából származó peremértékfeladat matematikai kezelése [3], lineáris elliptikus funkcionálegyenletek [27], erősen nemlineáris feladatok [25, 24].

Mi a pszeudomonoton operátorok elméletének technikáit alkalmazzuk az megoldás létezésének igazolására. (lásd az értekezés 2.3. szakaszát és [28, 26]). Pontosabban, Browder jól ismert szürjektivitási tételét (az értekezés 2.3.1. Tétele) alkalmazzuk, hogy igazoljuk az operátoregyenletünk megoldhatóságát. A feladat kezelésének fő nehézsége az, hogy a tartomány most nem feltétlenül korlátos, nemkorlátos tartományokra pedig általában nem érvényes a Rellich–Kondrachov tétel. Ezért Browder egy trükkjéhez folyamodunk [4]. Az értekezés 5.4. szakaszában megadunk egy sor konkrét példát olyan operátorokra, amelyek nemlokális függéssel rendelkeznek.

2. Jelölések

Legyen X egy Banach-tér és jelöle X^* a (folytonos) duálisát. Jelölje $J : X \to X^*$ a $\tau : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}_+$ mértékfüggvénynek megfelelő dualitási leképezést. Legyen $f : X \to \mathbb{R}$ egy lokálisan Lipschitz funkcionál. Az f Clarke-szubdifferenciálját az $u \in X$ pontban $\partial f(u)$ jelöli. Továbbá, jelölje $|\partial f|(u)$ az $\partial f(u)$ elemeinek normáinak minimumát. Egy kétváltozós $f(u, v)$ funkcionál esetén a megfelelő ”parciális” Clarke-szubdifferenciálokat $\partial_1 f(u, v)$ és $\partial_2 f(u, v)$ jelöli.

Adott $\Omega \subset \mathbb{R}^d$ taromány esetén, jelölje $W^{k,p}(\Omega)$ a k-adrendű p kitevőjű Sobolev-teret, a szokásos normával ellátva. Jelölje $W_0^{k,p}(\Omega)$ a $W^{k,p}(\Omega)$ azon alterét, amely a zérus nyomú függvényeket tartalmazza, ellátva a Sobolev-félnormával. Jelölje p^* a kritikus Sobolev-exponenst. Végezetül, jelölje $H^k(\Omega)$ és $H_0^k(\Omega)$ rendre a $W^{k,2}(\Omega)$ és $W_0^{k,2}(\Omega)$ tereket.

3. Linking-típusú eredmények a nemsima kritikus pont elméletben

Ebben a szakaszban az értekezés 3. fejezetét foglaljuk össze, amely a [7] dolgozat alapján készült. A technikai részleteket mellőzve csak néhány főbb tételt mondunk ki, illetve a p-Laplace operátorra vonatkozó sajátértékfeladatra vonatkozó eredményünket vázoljuk. Az értekezésben több lényeges és újszerű technikai lemma is szerepel, ezek önmagukban is érdekesek lehetnek, és az elmélet további kibővítésének alapjául szolgálhatnak. Ilyen például az értekezésben szereplő ún. deformációs lemma (az értekezés 3.3.1. Tétele), amelyből minden további eredményt levezetünk, és az annak bizonyításához felhasznált vektormező konstrukciójának ötlete (az értekezés 3.2.2. Lemmája), amely lényegesen újnak mondható.

Legyen tehát X Banach-tér és $E : X \to \mathbb{R}$ egy "energiafunkcionál". Az E funkcionál helyettesítési értékeit "energiának" nevezik, ugyanis a legtöbb alkalmazásban E egy fizikai rendszer energiafunkcionálja. Intitíve azt mondjuk, hogy X két részhalmaza, A és B "linking" viszonyban vannak, ha nem lehet őket széthúzni anélkül, hogy metszenék egymást és az A halmazon vett energiát dominálja a B halmazon vett energia. A "linking" viszonyra több definíció használatos [22, 100. oldal], [16, 226. oldal] és [15, 136. oldal]. Itt – minthogy korlátos normájú kritikus pontok érdekelnek bennünket – mi Schechter definícióját fogjuk használni, amely a $\overline{B}_R \subset X$ gömbre vonatkozik (a gömb peremét S_R fogja jelölni). Ehhez bevezetjük a $\mathcal{G} \subset C([0,1] \times \overline{B}_R, \overline{B}_R)$ *megengedett deformációk családját* amely azon $\Gamma \in \mathcal{G}$ elemekből áll, amelyre:

($G1$) Bármely $t \in [0,1)$ esetén $\Gamma(t,\cdot) : \overline{B}_R \to \overline{B}_R$ egy homeomorfizmus;

($G2$) $\Gamma(0,\cdot) = \mathrm{Id}$;

($G3$) Bármely $\Gamma \in \mathcal{G}$ esetén létezik $u_\Gamma \in \overline{B}_R$, amelyre $\Gamma(1,u) = u_\Gamma$ minden $u \in \overline{B}_R$ esetén és $\Gamma(t,u) \to u_\Gamma$ egyenletesen, ha $t \to 1$.

3.1. Definíció. Azt mondjuk, hogy $A \subset \overline{B}_R$ *linking viszonyban van* a $B \subset \overline{B}_R$ halmazzal a $\mathcal{G}$ családra nézve, ha

($L1$) $A \cap B = \emptyset$;

($L2$) Bármely $\Gamma \in \mathcal{G}$ esetén létezik $t \in (0,1]$ amelyre $\Gamma(t,A) \cap B \neq \emptyset$.

A kényelem kedvéért a fent vázolt szituációra bevezetjük az alábbi jelölést:

$$(\mathrm{LC})_{A,B,E} \begin{cases} (i) \ \overline{B}_R \supset A \text{ linking viszonyban van a } B \subset \overline{B}_R \text{ halmazzal a } \mathcal{G} \\ \quad\ \text{családra nézve;} \\ (ii) \ \sup\limits_A E := a_0 \leq b_0 := \inf\limits_B E; \\ (iii) \ c_R := \inf\limits_{\Gamma \in \mathcal{G}} \sup\limits_{\substack{t \in [0,1] \\ u \in A}} E(\Gamma(t,u)) < +\infty. \end{cases}$$

Az első tételünk kimondása előtt bevezetjük a $\pi_u : X^* \to \ker u$ projekciót, rögzített $u \in \overline{B}_R$ esetén a következő utasítással:

$$\pi_u(u^*) = \begin{cases} u^* - \frac{\langle u^*, u \rangle}{\|u\| \tau(\|u\|)} Ju, & \text{ha } u \neq 0, \\ u^*, & \text{ha } u = 0. \end{cases}$$

Az alábbi tétel azt állítja, hogy *vagy* van egy kritikus pontsorozat (azaz olyan sorozat, amely energiája a c_R értékhez konvergál és az energia $|\partial E|$ deriváltja zérushoz tart – nevezik ezt approximatív kritikus pontnak is) a $\overline{B}_R$ gömbben *vagy* van egy pontsorozat a S_R gömbfelszínen, amely energiája szintén a c_R értékhez konvergál, ám most az energia egy megfelelő értelemben vett "érintő irányú deriváltja" tart zérushoz.

3.2. Tétel. Legyen $E : \overline{B}_R \to \mathbb{R}$ egy lokálisan Lipschitz funkcionál és legyen $A, B \subset \overline{B}_R$ olyan, hogy $(\mathrm{LC})_{A,B,E}$ érvényes. Tegyük fel továbbá, hogy létezik $\Lambda_R > 0$ úgy, hogy

$$|\langle u^*, u\rangle| \leq \Lambda_R, \text{ bármely } u \in S_R \text{ és bármely } u^* \in \partial E(u) \tag{1}$$

esetén. Ekkor a következő alternatíva érvényes.

. Vagy

. (A1) létezik $\{u_n\} \subset \overline{B}_R$ úgy, hogy

$$E(u_n) \to c_R \text{ and } |\partial E|(u_n) \to 0.$$

Továbbá, ha $c_R = b_0$, akkor $d(u_n, B \cup S_R) \to 0$.

. vagy

. (A2) létezik $\{u_n\} \subset S_R$ és $\{u_n^*\} \subset X^*$ amelyre $u_n^* \in \partial E(u_n)$ úgy, hogy

$$E(u_n) \to c_R, \ \|\pi_{u_n}(u_n^*)\| \to 0 \text{ és } \langle u_n^*, u_n\rangle \leq 0.$$

Az alábbi triviális következmény szintén hasznos a gyakorlatban.

3.3. Következmény. Tegyük fel, hogy a 3.2. Tétel feltételei érvényben vannak. Ekkor létezik $\{u_n\} \subset$ $\subset \overline{B}_R$, és $\{u_n^*\} \subset X^*$ amelyre $u_n^* \in \partial E(u_n)$ és $\nu \in \mathbb{R}_-$ úgy, hogy

$$E(u_n) \to c_R, \quad \|\pi_{u_n}(u_n^*)\| \to 0 \quad \text{és} \quad \langle u_n^*, u_n\rangle \to \nu.$$

Tovéábbá, ha $c_R = b_0$, akkor $d(u_n, B \cup S_R) \to 0$.

Megjegyezzük, hogy ha $E : \overline{B}_R \to \mathbb{R}$ egy C^1-osztályú funkcionál (tehát a Clarke szubdifferenciálja egyértékű), akkor az iménti következmény állítása a következőképpen szól: létezik $\{u_n\} \subset \overline{B}_R$ úgy, hogy

$$E(u_n) \to c_R, \ \left\| E'(u_n) - \frac{\langle E'(u_n), u_n\rangle}{\|u_n\|\tau(\|u_n\|)} J u_n \right\| \to 0, \ \langle E'(u_n), u_n\rangle \to \nu \leq 0,$$

Ha ráadasul X Hilbert tér, akkor a fenti éppen Schechter eredeti feltételére redukálódik (lásd [22, Corollary 5.3.2.]).

A szokott módon ezen a ponton bevezetünk egy megfelelő kompaktsági kritériumot az E funkcionálra nézve, amellyel a fenti eredmények kritikus pontok létezését (nem csak approximatíve) garantálják. Schechtert követve bevezetjük a következő definíciót.

3.4. Definíció. mondjuk, hogy az $E : X \to \mathbb{R}$ lokálisan Lipschitz funkcionál eleget tesz a *Schechter-Palais-Smale feltételnek a c szinten* a $\overline{B}_R$ halmazon, röviden $(SPS)_c$, ha bármely olyan $\{u_n\} \subset \overline{B}_R$ sorozatra, amelyre

. (SPS1) $E(u_n) \to c$, és

. (SPS2) $u_n^* \in \partial E(u_n)$ és alkalmas $\nu \leq 0$ számmal $\|\pi_{u_n}(u_n^*)\| \to 0$ és $\langle u_n^*, u_n\rangle \to \nu \leq 0$,

következik, hogy az $\{u_n\}$ sorozatnak van erősen konvergens részsorozata.

A következő tétel azt állítja, hogy *vagy* van egy kritikus pont a $\overline{B}_R$ gömbben, *vagy* van egy pont az S_R gömbfelületen, amely energiája épp c_R, és amely egy negatív sajátértéknek megfelelő sajátvektor.

3.5. Tétel. Legyen $E : \overline{B}_R \to \mathbb{R}$ egy lokálisan Lipschitz funkcionál, amelyre az $(\mathrm{LC})_{A,B,E}$ feltétel érvényes alkalmas $A, B \subset \overline{B}_R$ halmazokkal. Tegyük fel továbbá, hogy (1) és $(SPS)_{c_R}$ is teljesül. Ekkor a következő alternatíva érvényes.

. (A1') Vagy létezik $u \in \overline{B}_R$ úgy, hogy

$$E(u) = c_R \text{ and } 0 \in \partial E(u),$$

. (A2') vagy létezik $u \in S_R$ és $\lambda < 0$ úgy, hogy

$$E(u) = c_R \text{ és } \lambda Ju \in \partial E(u).$$

Továbbá, az (A1') esetben ha $c_R = b_0$, akkor $u \in \bar{B} \cup S_R$.

A "$0 \in \partial E(u)$" és a "$\lambda Ju \in \partial E(u)$" relációkat *differenciálinklúzióknak* nevezik és tekinthetőek a klasszikus Euler–Lagrange egyenletek "nemsima" általánosításainak.

A következő multiplicitási eredményt az lenti alkalmazáshoz használjuk fel.

3.6. Tétel. Legyen $E : \overline{B}_R \to \mathbb{R}$ egy egy lokálisan Lipschitz funkcionál és $m_R := \inf_{B_R} E > -\infty$, illetve (1) érvényes. Tegyük fel, hogy létezik olyan A, B részhalmaza $\overline{B}_R$-nek, amelyre $(\mathrm{LC})_{A,B,E}$ és az $(SPS)_c$ feltétel érvényes $c \in \{c_R, m_R\}$ esetén. Ekkor létezik $u_1, u_2 \in \overline{B}_R$ és $\lambda_1, \lambda_2 \leq 0$ úgy, hogy $u_1 \neq u_2$ és

$$\lambda_k Ju_k \in \partial E(u_k), \quad k = 1{,}2. \tag{2}$$

Továbbá, ha $\lambda_k < 0$, akkor $u_k \in S_R$. Ha létezik $v_0, v_1 \in A \cap B_R$ különbözőek, amelyre $E(v_1) \leq E(v_0)$ és $v_0 \notin \overline{B}$, akkor u_1 és u_2 megválaszthatóak úgy, hogy $v_0 \notin \{u_1, u_2\}$.

A szakasz hátralevő részét a p-Laplace operátorra vonatkozó differenciálinklúziók tanulmányozásának szenteljük. Az értekezésben durván szólva azt igazoljuk, hogy *vagy* van a

$$(P)\begin{cases} -\Delta_p u \in \partial_2 f(x, u(x)), & \Omega\text{-n}, \\ u = 0, & \partial\Omega\text{-n}, \end{cases}$$

feladatnak legalább két nemtriviális gyenge megoldása, *vagy* az ennek megfelelő

$$(P_\lambda)\begin{cases} -\Delta_p u \in \lambda\partial_2 f(x, u(x)), & \Omega\text{-n}, \\ u = 0, & \partial\Omega\text{-n}, \end{cases}$$

sajátérékfeladatnak rengeteg megoldása van, ha a sajátértékek (0,1) intervallumban vannak. Itt $\Delta_p u = \mathrm{div}(|\nabla u|^{p-2}\nabla u)$, $1 < p < \infty$ a p-Laplace operátor, $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ $(N \geq 2)$ egy korlátos tartomány $C^{1,\alpha}$ peremmel, $f : \Omega \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ egy második változójában lokálisan Lipschitz függvény és $\partial_2 f(x, t)$ a $t \mapsto f(x, t)$ leképezés Clarke-szubdifferenciálját jelöli.

3.7. Definíció. Azt mondjuk, hogy az $u \in W_0^{1,p}(\Omega)$ függény a (P) feladat *gyenge megoldása*, ha létezik $\xi \in W^{-1,p'}(\Omega)$ úgy, hogy $\xi(x) \in \partial_2 f(x, u(x))$ m.m. $x \in \Omega$ esetén, és

$$\int_\Omega |\nabla u|^{p-2}\nabla u \cdot \nabla v \, dx = \int_\Omega \xi(x)v(x) \, dx, \text{ bármely } v \in W_0^{1,p}(\Omega) \text{ esetén.}$$

3.8. Definíció. Azt mondjuk, hogy $\lambda \neq 1$ *sajátértéke* a (P_λ) sajétértékfeladatnak, ha létezik $u_\lambda \in W_0^{1,p}(\Omega) \setminus \{0\}$ és $\xi_\lambda \in W^{-1,p'}(\Omega)$ úgy, hogy $\xi_\lambda(x) \in \partial_2 f(x, u_\lambda(x))$ m.m. $x \in \Omega$ esetén,és

$$\int_\Omega |\nabla u|^{p-2}\nabla u \cdot \nabla v \, dx = \lambda \int_\Omega \xi_\lambda(x)v(x) \, dx, \text{ bármely } v \in W_0^{1,p}(\Omega) \text{ esetén..}$$

A fenti relációt kielégítő u_λ függvényt a λ-nak megfelelő *sajátfüggvénynek* nevezzük.

Az elméleti eredményeink alkalmazásához az alábbi feltevésekkel kell élnünk.

3.1. Feltevés. Az $f : \Omega \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ függvényre érvényesek az alábbiak.

(f1) Bármely $t \in \mathbb{R}$ esetén az $x \mapsto f(x,t)$ leképezés mérhető és $f(x,0) = 0$.

(f2) Majdnem minden $x \in \Omega$ esetén a $t \mapsto f(x,t)$ leképezés lokálisan Lipschitz.

(f3) Létezik $C > 0$ és $q \in (p, p^*)$ úgy, hogy

$$|\xi| \le C|t|^{q-1},$$

m.m. $x \in \Omega$, minden $t \in \mathbb{R}$ és minden $\xi \in \partial_2 f(x,t)$ esetén.

3.2. Feltevés. Létezik $u_0 \in W_0^{1,p}(\Omega) \setminus \{0\}$ úgy, hogy

$$|u_0|_{1,p}^p \le p \int_\Omega f(x, u_0(x))\, dx.$$

A 3.6. Tételből ekkor némi számolással a következő alternatívatétel vezethető le.

3.9. Tétel. Tegyük fel, hogy a 3.1–3.2. Feltevések érvényben vannak. Ekkor igaz a következő alternatíva.

. Vagy

. (a) a (P) feladatnak van legalább két nemtriviális gyenge megoldása,

. vagy,

. (b) Bármely $R \in (|u_0|_{1,p}, \infty)$ esetén (P_λ) sajátértékfeladatnak van egy $\lambda \in (0,1)$ sajátértéke, és a hozzá tartozó u_λ sajátfüggvényre érvényes $|u_\lambda|_{1,p} = R$.

4. Egy kontaktfeladat gyenge megoldhatósága nemmonoton peremfeltételek mellett

Ebben a szakaszban az értekezés 4. fejezetének fő fogalmait és eredményeit közöljük, amely alapjául a [6] dolgozat szolgált.

Tekintsünk egy testet, amely a kellően sima Γ peremű $\Omega \subset \mathbb{R}^m$ $(m = 2{,}3)$ tartományt tölti ki és jelölje a kifelé mutató normálvektort $\boldsymbol{\nu}$. A testre $\mathbf{f}_0$ erősűrűségű erők hatnak Ω-n, illetve mechanikai kényszerek hatnak rá a Γ peremen. A kényszerek leírásához a Γ halmazt három Lebesgue-mérhető részre bontjuk: $\Gamma_1, \Gamma_2, \Gamma_3$, úgy, hogy Γ_1 pozitív Lebesgue mértékű legyen.

- A test *rögzítve van* Γ_1-en, azaz a kitérési vektormező eltűnik itt.
- Γ_2-n $\mathbf{f}_2$ erősűrűségű *felületi húzóerő* hat.
- Γ_3-on a test érintkezhet egy akadállyal, amit *alapzatnak* nevezünk.

Adott $\mathbf{v} \in H^{1/2}(\Gamma; \mathbb{R}^m)$ esetén v_ν és v_τ jelöli $\mathbf{v}$ normális és tangenciális komponenseit, azaz

$$v_\nu = \mathbf{v} \cdot \boldsymbol{\nu} \quad \text{és} \quad \mathbf{v}_\tau = \mathbf{v} - v_\nu \boldsymbol{\nu}.$$

Hasonlóan, a $\boldsymbol{\sigma}$ tenzormező esetén legyenek σ_ν és σ_τ a *normális* és *tangenciális komponensei* a $\boldsymbol{\sigma\nu}$ *Cauchy-féle vekormezőnek*, pontosabban legyen

$$\sigma_\nu = \boldsymbol{\sigma\nu} \cdot \boldsymbol{\nu} \quad \text{és} \quad \boldsymbol{\sigma}_\tau = \boldsymbol{\sigma\nu} - \sigma_\nu \boldsymbol{\nu}.$$

Jelölje $\mathcal{S}^m$ a szimmetrikus mátrixok altéret a $\mathbb{R}^{m\times m}$ térben, a Frobenius skalárszorzattal ellátva. Bevezetjük a

$$\begin{aligned}
H &= L^2(\Omega; \mathbb{R}^m)\\
\mathcal{H} &= \left\{\boldsymbol{\tau} = (\tau_{ij})_{i,j=1}^m : \ \tau_{ij} = \tau_{ji} \in L^2(\Omega)\right\} = L^2(\Omega; \mathcal{S}^m)\\
H_1 &= \{\mathbf{u} \in H : \ \boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{u}) \in \mathcal{H}\} = H^1(\Omega; \mathbb{R}^m)\\
\mathcal{H}_1 &= \{\boldsymbol{\tau} \in \mathcal{H} : \ \mathrm{Div}\boldsymbol{\tau} \in H\},
\end{aligned}$$

jelöléseket, ahol a megfelelő függvényterek a szokásos skalárszorzattal vannak ellátva. Itt $\boldsymbol{\varepsilon}$ a deformációoperátor és Div jelöli a tenzordivergenciát.

Az általunk vizsgált feladat erős alakja a következő (lásd az értekezés 4.1. szakaszát az érvényességét illető fizikai feltevésekkel kapcsolatban).

(P) Keressük az $\mathbf{u} : \Omega \to \mathbb{R}^m$ *kitérést* és a $\boldsymbol{\sigma} : \Omega \to \mathcal{S}^m$ *feszültségtenzort*, amelyre

$$-\mathrm{Div}\boldsymbol{\sigma} = \mathbf{f}_0, \quad \Omega\text{-n} \tag{3}$$

$$\boldsymbol{\sigma} \in \partial\varphi(\boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{u})), \quad \Omega\text{-n} \tag{4}$$

$$\mathbf{u} = 0, \quad \Gamma_1\text{-en} \tag{5}$$

$$\boldsymbol{\sigma\nu} = \mathbf{f}_2, \quad \Gamma_2\text{-n} \tag{6}$$

$$-\sigma_\nu \in \partial_2 j_\nu(\cdot, u_\nu) + N_{C_1}(u_\nu), \quad \Gamma_3\text{-on} \tag{7}$$

$$-\boldsymbol{\sigma}_\tau \in h(\cdot, \mathbf{u}_\tau)\partial_2 j_\tau(\cdot, \mathbf{u}_\tau) + N_{C_2}(\mathbf{u}_\tau), \quad \Gamma_3\text{-on} \tag{8}$$

ahol

- $\varphi : \mathcal{S}^m \to \mathbb{R}$ konvex és alulról félig folytonos,
- $j_\nu : \Gamma_3 \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ és $j_\tau : \Gamma_3 \times \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}$ lokálisan Lipschitz folytonosak a második változójukban és $h : \Gamma_3 \times \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}$ egy adott függvény.

Továbbá $C_1 \subset \mathbb{R}$ és $C_2 \subset \mathbb{R}^m$ nemüres, zárt és konvex halmazok és N_{C_k} a C_k normálkúpját jelöli ($k = 1{,}2$).

Itt (3) az *egyensúlyi egyenlet* (azaz Newton második törvénye), (4) az *anyagtörvény*, (5)-(6) a *kitérési- és húzási peremfeltételek*, illetve (7)-(8) írja le a test és az alap közötti érintkezést.

Most megadjuk a **(P)** feladat gyenge alakját. Az $\boldsymbol{f}_0$, $\boldsymbol{f}_2$, φ, h, j_ν és j_τ függvényekre az alábbi feltevéseket tesszük.

. $(\boldsymbol{H_C})$ A kényszereket leíró C_1 és C_2 halmazok konvex kúpok, azaz

$$0 \in C_k \quad \text{és} \quad \lambda C_k \subset C_k \text{ minden } \lambda > 0, \quad k = 1{,}2 \text{ esetén .}$$

. $(\boldsymbol{H_f})$ Az *erősűrűségre* és a *húzásra* érvényes $\mathbf{f}_0 \in H$ and $\mathbf{f}_2 \in L^2(\Gamma_2; \mathbb{R}^m)$.

. $(\boldsymbol{H_\varphi})$ A $\varphi : \mathcal{S}^m \to \mathbb{R}$ *anyagfuggvényre* és annak $\varphi^* : \mathcal{S}^m \to (-\infty, +\infty]$ Fenchel konjugáltjára érvényesek az alábbiak.

  . (i) φ konvex és alulról félig folytonos.

  . (ii) Létezik $\alpha_1 > 0$ úgy, hogy $\varphi(\boldsymbol{\tau}) \geq \alpha_1 |\boldsymbol{\tau}|^2$ minden $\boldsymbol{\tau} \in \mathcal{S}^m$ esetén.

  . (iii) Létezik $\alpha_2 > 0$ úgy, hogy $\varphi^*(\boldsymbol{\mu}) \geq \alpha_2 |\boldsymbol{\mu}|^2$ minden $\boldsymbol{\mu} \in \mathcal{S}^m$ esetén.

  . (iv) $\varphi(\boldsymbol{\varepsilon}(\boldsymbol{v})) \in L^1(\Omega)$ minden $\boldsymbol{v} \in V$, $\varphi^*(\boldsymbol{\tau}) \in L^1(\Omega)$ és $\boldsymbol{\tau} \in \mathcal{H}$ esetén.

. $(\boldsymbol{H_h})$ A $h : \Gamma_3 \times \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}$ függvény olyan, hogy

  . (i) $\Gamma_3 \ni x \mapsto h(x, \boldsymbol{\zeta})$ mérhető rögzített $\boldsymbol{\zeta} \in \mathbb{R}^m$ esetén,

  . (ii) $\mathbb{R}^m \ni \boldsymbol{\zeta} \mapsto h(x, \boldsymbol{\zeta})$ folytonos m.m. $x \in \Gamma_3$ esetén

  . (iii) Létezik $h_0 > 0$ úgy, hogy $0 \leq h(x, \boldsymbol{\zeta}) \leq h_0$ m.m. $x \in \Gamma_3$ és minden $\boldsymbol{\zeta} \in \mathbb{R}^m$ esetén.

. $(\boldsymbol{H_{j_\nu}})$ A $j_\nu : \Gamma_3 \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ függvény olyan, hogy

  . (i) $\Gamma_3 \ni x \mapsto j_\nu(x, t)$ mérhető minden $t \in \mathbb{R}$ esetén,

  . (ii) Létezik $p \in L^2(\Gamma_3)$ úgy, hogy minden $x \in \Gamma_3$ és minden $t_1, t_2 \in \mathbb{R}$ esetén

$$|j_\nu(x, t_1) - j_\nu(x, t_2)| \leq p(x)|t_1 - t_2|;$$

  . (iii) $j_\nu(x{,}0) \in L^1(\Gamma_3)$.

. $(\boldsymbol{H_{j_\tau}})$ A $j_\tau : \Gamma_3 \times \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}$ függvény olyan, hogy

. (i) $\Gamma_3 \ni x \mapsto j_\tau(x, \boldsymbol{\zeta})$ mérhető minden $\boldsymbol{\zeta} \in \mathbb{R}^m$ esetén;

. (ii) tLétezik $q \in L^2(\Gamma_3)$ úgy, hogy m.m. $x \in \Gamma_3$ és minden $\boldsymbol{\zeta}_1, \boldsymbol{\zeta}_2 \in \mathbb{R}^m$ esetén

$$|j_\tau(x, \boldsymbol{\zeta}_1) - j_\tau(x, \boldsymbol{\zeta}_2)| \le q(x)|\boldsymbol{\zeta}_1 - \boldsymbol{\zeta}_2|;$$

. (iii) $j_\tau(x,0) \in L^1(\Gamma_3; \mathbb{R}^m)$.

Legyen

$$V = \{\mathbf{v} \in H_1 : \ \mathbf{v} = 0 \text{ m.m. } \Gamma_1\text{-en}\}, \tag{9}$$

ami H_1 egy zárt altere.

4.1. Definíció. A V következő nemüres, zárt és konvex részhalmazát a *megengedett kitérések halmazának* nevezzük,

$$\Lambda = \{\mathbf{v} \in V : \ v_\nu(x) \in C_1 \text{ és } \mathbf{v}_\tau(x) \in C_2 \text{ m.m. } x \in \Gamma_3\},$$

Hosszadalmas számolás után elérkezünk a $(\boldsymbol{P})$ erős feladat gyenge alakjához,

$$(\tilde{\boldsymbol{P}}) \begin{cases} \text{Keressük az } \mathbf{u} \in \Lambda \text{ és } \boldsymbol{\sigma} \in \mathcal{H} \text{ függvényeket, amelyekre} \\ (L^*\boldsymbol{\sigma}, \mathbf{v} - \mathbf{u})_V \\ \quad + \displaystyle\int_{\Gamma_3} \left[j_\nu^0(x, u_\nu; v_\nu - u_\nu) + h(x, u_\tau) j_\tau^0(x, \mathbf{u}_\tau; \mathbf{v}_\tau - \mathbf{u}_\tau) \right] dx \ge (\mathbf{f}, \mathbf{v} - \mathbf{u})_V, \ \forall \mathbf{v} \in \Lambda, \\ -(L\mathbf{u}, \boldsymbol{\mu} - \boldsymbol{\sigma})_{\mathcal{H}} + \displaystyle\int_\Omega (\varphi^*(\boldsymbol{\mu}) - \varphi^*(\boldsymbol{\sigma})) \ge 0, \ \forall \boldsymbol{\mu} \in \mathcal{H}. \end{cases}$$

ahol az $L : V \to \mathcal{H}$ operátort az $L\mathbf{v} = \boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{v})$ utasítással értelmezzük, és $L^* : \mathcal{H} \to V$ jelöli az adjungáltját. Itt az első egyenlőtlenség az egyensúlyi egyenlettel kapcsolatos, míg a második az anyagtörvény funkcionális kiterjesztése.

4.2. Definíció. Nevezzük az $\mathbf{u}$ *kitérésre nézve megengedett feszültségtenzorok halmazának* a

$$\Theta_{\mathbf{u}} = \Big\{ \boldsymbol{\mu} \in \mathcal{H} : \\ (L^*\boldsymbol{\mu}, \mathbf{v})_V + \int_{\Gamma_3} \left[j_\nu^0(x, u_\nu; v_\nu) + h(x, \mathbf{u}_\tau) j_\tau^0(x, \mathbf{u}_\tau; \mathbf{v}_\tau) \right] dx \ge (\mathbf{f}, \mathbf{v})_V, \ \forall \mathbf{v} \in \Lambda \Big\}.$$

halmazt.

4.3. Definíció. Legyen E Banach-tér. Egy *bipotenciál* egy olyan $B : E \times E^* \to (-\infty, +\infty]$ függvény, amely eleget tesz az alábbi feltételeknek.

. (i) bármely $x \in E$ esetén, ha $D(B(x, \cdot)) \ne \emptyset$, akkor $B(x, \cdot)$ proper és alulról félig folytonos; bármely $\xi \in E^*$ esetén, ha $D(B(\cdot, \xi)) \ne \emptyset$, akkor $B(\cdot, \xi)$ proper, konvex és alulról félig folytonos;

. (ii) $B(x, \xi) \ge \langle \xi, x \rangle_{E^* \times E}$ minden $x \in E$ és $\xi \in E^*$ esetén;

. (iii) $\xi \in \partial B(\cdot, \xi)(x) \Leftrightarrow x \in \partial B(x, \cdot)(\xi) \Leftrightarrow B(x, \xi) = \langle \xi, x \rangle_{E^* \times E}$.

A konvex analízis egy alaperedményéből (lásd az értekezés 2.4.3. Állítása) következik, hogy létezik egy szeparált *bipotenciál* $a : \mathcal{S}^m \times \mathcal{S}^m \to (-\infty, +\infty]$, amely összekapcsolja a φ anyagtörvényt, és annak φ^* Fenchel konjugáltját a következő módon:

$$a(\boldsymbol{\tau}, \boldsymbol{\mu}) = \varphi(\boldsymbol{\tau}) + \varphi^*(\boldsymbol{\mu}), \text{ minden } \boldsymbol{\tau}, \boldsymbol{\mu} \in \mathcal{S}^m \text{ esetén.}$$

Az a bipotenciál segítségével definiáljuk az $A : V \times \mathcal{H} \to \mathbb{R}$ függvényt,

$$A(\mathbf{v}, \boldsymbol{\mu}) = \int_\Omega a(L\mathbf{v}, \boldsymbol{\mu})\, dx, \text{ minden } \mathbf{v} \in V, \boldsymbol{\mu} \in \mathcal{H} \text{ esetén.}$$

Ezek felhasználásával a gyenge alak átírható a következőképpen,

$$
(\mathcal{P}^b_{var})\begin{cases}\text{Keressük az } \mathbf{u}\in\Lambda \text{ és } \boldsymbol{\sigma}\in\Theta_{\mathbf{u}} \text{ függvényeket, amelyekre}\\ A(\mathbf{v},\boldsymbol{\sigma})-A(\mathbf{u},\boldsymbol{\sigma})+\\ \qquad\displaystyle\int_{\Gamma_3}\left[j^0_\nu(x,u_\nu;v_\nu-u_\nu)+h(x,\mathbf{u}_\tau)j^0_\tau(x,\mathbf{u}_\tau;\mathbf{v}_\tau-\mathbf{u}_\tau)\right]dx\geq(\mathbf{f},\mathbf{v}-\mathbf{u})_V, \quad \forall\mathbf{v}\in\Lambda,\\ A(\mathbf{u},\boldsymbol{\mu})-A(\mathbf{u},\boldsymbol{\sigma})\geq 0, \forall\boldsymbol{\mu}\in\Theta_{\mathbf{u}}.\end{cases}
$$

Ezek után megadjuk a feladat primál-, és duál variációs alakját, illetve igazoljuk a $(\mathcal{P}^b_{var})$ feladat egyenértékűségét a primál-duál feladattal (az értekezés 4.4.1. Állítása). A $(\mathcal{P}^b_{var})$ feladat megoldhatóságának bizonyítása Costea és Varga egy új eredményére támaszkodik [8], vagy a kényelem kedvéért lásd az értekezés 2.5. szakaszát.

4.4. Tétel. Tételezzük fel, hogy $(\boldsymbol{H_C})$, $(\boldsymbol{H_f})$, $(\boldsymbol{H_h})$, $(\boldsymbol{H_{j_\nu}})$, $(\boldsymbol{H_{j_\tau}})$ és $(\boldsymbol{H_\varphi})$ érvényben vannak. Ekkor a $(\mathcal{P}^b_{var})$ feladatnak van megoldása.

5. Egy nemlokális elliptikus feladat megoldhatósága

Ebben a szakaszban az értekezés 5. fejezetének fő eredményét mondjuk ki, amely alapjául a [9] dolgozat szolgált.

Legyen $\Omega\subset\mathbb{R}^n$ egy esetleg nemkorlátos tartomány kellően sima peremmel, és legyen $W^{k,p}_0(\Omega)\subset\subset V\subset W^{k,p}(\Omega)$ egy zárt altér, ahol $1<p<\infty$ és $k\geq 1$. Legyen $A\colon V\to V^*$ a következő utasítással értelmezve:

$$
\langle A(u),v\rangle=\sum_{|\alpha|\leq k}\int_\Omega a_\alpha(x,u(x),\ldots,\partial^\beta u(x),\ldots;u)\partial^\alpha v(x)\,dx \tag{10}
$$

minden $u,v\in V$ esetén, ahol $|\beta|\leq k$ egy multiindex. Az a_α függvény az u tetszőleges parciális deriváltjának helyettesítési értékétől függhet. Továbbá az „$;u$" jelölés arra hivatott emlékeztetni, hogy a_α lehet egy *funkcionálja* u-nak. Másképpen mondva, a_α függhet az *egész* u megoldástól.

Az a_α függvény argumentumait $a_\alpha(x,\eta;u)$ jelöli, és η-t felbontjuk $\eta=(\zeta,\xi)$ alakban, ahol $\zeta\in\mathbb{R}^{N_1}$ és $\xi\in\mathbb{R}^{N_2}$, így $\eta\in\mathbb{R}^N$ ahol $N=N_1+N_2$ és írhatunk $a_\alpha(x,\zeta,\xi;u)$-t, ahol az N_1 és N_2 számok rendre azon β multiindexek számát jelölik, amelyre rendre $|\beta|\leq k-1$ és $|\beta|=k$. Továbbá az

$$
\eta^{(\ell)}=\{\eta_\beta\ :\ |\beta|=\ell\}
$$

jelölést is használjuk, ahol $\ell=0{,}1,\ldots,k$. Ezzel

$$
\zeta=\left\{\eta^{(\ell)}\ :\ \ell=0{,}1,\ldots,k-1\right\}\quad \text{és}\quad \xi=\left\{\eta^{(\ell)}\ :\ \ell=k\right\}.
$$

Az A operátor szerkezetére és Ω tartományra vonatkozólag az alábbi feltevéseket tesszük.

(A0) Tegyük fel, hogy létezik korlátos tartományok olyan $\{\Omega_i\}\subset\mathbb{R}^n$ sorozata, amelyre $\Omega_i\subset\Omega_{i+1}$ $(i=1{,}2,\ldots)$ és $\Omega=\bigcup_{i=1}^\infty\Omega_i$. Továbbá, tegyük fel, hogy mindegyik $\partial\Omega_i$ elegendően sima, azaz a Rellich–Kondrachov tétel érvényes: $W^{k,p}(\Omega_i)\subset\subset W^{k-1,p}(\Omega_i)$ $(i=1{,}2,\ldots)$.

(A1) Legyen a_α Carathéodory-féle függvény rögzített $u\in V$ és minden $|\alpha|\leq k$ multiindex esetén, azaz legyen $a_\alpha(\,\cdot\,,\eta;u)$ mérhető minden rögzített $\eta\in\mathbb{R}^N$ esetén, és legyen $a_\alpha(x,\,\cdot\,;u)$ folytonos m.m. $x\in\Omega$ esetén.

(A2) Tegyük fel, hogy létezik egy $g_1\colon V\to\mathbb{R}_+$ korlátos funkcionál és egy

$$
k_1^\alpha\colon V\to L^{r'_\ell}(\Omega)
$$

kompakt leképezés, amelyre $k_1^\alpha(u)\geq 0$, ahol $p'=p/(p-1)$, $r'_\ell=r_\ell/(r_\ell-1)$ és

$$
p\leq r_\ell<p^*_\ell,\qquad p^*_\ell=\begin{cases}\dfrac{np}{n-(k-\ell)p}, & \text{ha } n>(k-\ell)p\\ >0, & \text{egyébként.}\end{cases}
$$

úgy, hogy
$$|a_\alpha(x,\eta;u)| \le g_1(u)\Big[|\eta^{(\ell)}|^{p-1} + |\eta^{(\ell)}|^{r_\ell - 1}\Big] + [k_1^\alpha(u)](x)$$
bármely $\ell = |\alpha| \le k$ multiindex, m.m. $x \in \Omega$, minden $\eta \in \mathbb{R}^N$ és minden $u \in V$ esetén.
(A3) Tegyük fel, hogy
$$\sum_{|\alpha|=k} \big(a_\alpha(x,\zeta,\xi;u) - a_\alpha(x,\zeta,\xi';u)\big)(\xi_\alpha - \xi'_\alpha) > 0$$
m.m. $x \in \Omega$, minden $\zeta \in \mathbb{R}^{N_1}$, $\xi \ne \xi' \in \mathbb{R}^{N_2}$ és $u \in V$ esetén.
(A4) Tegyük fel, hogy létezik egy $g_2\colon V \to \mathbb{R}_+$ korlátos és alulról félig folytonos funkcionál és egy $k_2\colon V \to L^1(\Omega)$ kompakt leképezés, amelyre
$$\sum_{|\alpha|\le k} a_\alpha(x,\eta;u)\eta_\alpha \ge g_2(u)|\xi|^p - [k_2(u)](x)$$
m.m. $x \in \Omega$, minden $u \in V$, és $\eta = (\zeta,\xi) \in \mathbb{R}^{N_1} \times \mathbb{R}^{N_2}$ esetén.
(A4') Tegyük fel, hogy létezik egy $g_2\colon V \to \mathbb{R}_+$ funkcionál és egy $k_2\colon V \to L^1(\Omega)$ kompakt leképezés úgy, hogy
$$\sum_{|\alpha|\le k} a_\alpha(x,\eta;u)\eta_\alpha \ge \begin{cases} g_2(u)|\xi|^p - [k_2(u)](x), & \text{nármely } u \in V \text{ esetén} \\ g_2(u)\Big[|\xi|^p + \sum_{\ell=0}^{k-1}(|\eta^{(\ell)}|^p + |\eta^{(\ell)}|^{r_\ell})\Big] - [k_2(u)](x), & \text{nagy } \|u\|_V \text{ esetén} \end{cases}$$
m.m. $x \in \Omega$ és minden $\eta = (\zeta,\xi) \in \mathbb{R}^N$ esetén. A g_2 funkcionálra érvényes a
$$g_2(u) \ge c^*\|u\|_V^{-\sigma^*}$$
becslés minden olyan $u \in V$ esetén, amelyre $\|u\|_V$ kellően nagy, alkalmas $c^* > 0$ és $0 \le \sigma^* < p-1$ mellett. Továbbá, a k_2 leképezésre érvényes a
$$\|k_2(u)\|_{L^1(\Omega)} \le c^*\|u\|_V^\sigma$$
becslés minden olyan $u \in V$ esetén, amelyre $\|u\|_V$ kellően nagy, alkalmas $0 \le \sigma < p - \sigma^*$ mellett.
(A5) Hacsak $u_j \rightharpoonup u$ V-ben és $\{\eta_j\} \subset \mathbb{R}^N$ amelyre $\eta_j \to \eta$, akkor $a_\alpha(x,\eta_j;u_j) \to a_\alpha(x,\eta;u)$ m.m. $x \in \Omega$ esetén alkalmas részsorozatra.

Az értekezés 5. fejezetének fő eredménye a következő,

5.1. Tétel. Tegyük fel hogy az ***(A0)***-***(A5)*** és ***(A4')*** feltevések érvényesek. Ekkor bármely $F \in V^*$ esetén létezik $u \in V$ úgy, hogy $A(u) = F$ érvényes V^*-ben.

A bizonyítás abból áll, hogy igazoljuk A pszeudomonoton és koercív voltát, ezek után alkalmazható a pszeudomonoton operátorok elméletének Browder-féle szürjektivitási tétele.

Hivatkozások

[1] A. Ambrosetti and A. Malchiodi, *Nonlinear Analysis and Semilinear Elliptic Problems*, no. v. 10 in Cambridge Studies in Advanced Mathematics, Cambridge University Press, 2007.

[2] A. Ambrosetti and P. Rabinowitz, *Dual variational methods in critical point theory and applications*, J. Functional Analysis, 14 (1973), pp. 349 – 381.

[3] A. Bitsadze and A. Samarskii, *On some simple generalizations of linear elliptic boundary problems, mr0247271 russian acad. sci*, in Dokl. Math, vol. 10, 1969, pp. 398–400.

[4] F. E. Browder, *Pseudo-monotone operators and nonlinear elliptic boundary value problems on unbounded domains*, Proceedings of the National Academy of Sciences, 74 (1977), pp. 2659–2661.

[5] K.-C. Chang, *Variational methods for non-differentiable functionals and their applications to partial differential equations*, J. Math. Anal. Appl., 80 (1981), pp. 102 – 129.

[6] N. Costea, M. Csirik, and C. Varga, *Weak solvability via bipotential method for contact models with nonmonotone boundary conditions*, Zeitschrift für angewandte Mathematik und Physik, 66 (2015), pp. 2787–2806.

[7] ——, *Linking-type results in nonsmooth critical point theory and applications*, Set-Valued and Variational Analysis, 25 (2017), pp. 333–356.

[8] N. Costea, C. Varga, et al., *Systems of nonlinear hemivariational inequalities and applications*, Topological Methods in Nonlinear Analysis, 41 (2013), pp. 39–65.

[9] M. Csirik, *On pseudomonotone elliptic operators with functional dependence on unbounded domains*, Electronic Journal of Qualitative Theory of Differential Equations, 2016 (2016), pp. 1–15.

[10] G. De Saxcé and Z.-Q. Feng, *New inequality and functional for contact with friction: The implicit standard material approach*, Journal of Structural Mechanics, 19 (1991), pp. 301–325.

[11] J. Díaz and G. Hetzer, *A quasilinear functional reaction-diffusion equation arising in climatology*, Equations aux Dérivée Partielles et Apllications, Gauthier-¡illars, Paris, (1998), pp. 461–480.

[12] P. Drábek, *The p-Laplacian–mascot of nonlinear analysis*, Acta Math. Univ. Comenianae, 76 (2007), pp. 85–98.

[13] P. Drabek and J. Milota, *Methods of Nonlinear Analysis: Applications to Differential Equations*, Birkhäuser Advanced Texts Basler Lehrbücher, Springer Basel, 2013.

[14] G. Fichera, *Sul problema elastostatico di Signorini con ambigue condizioni al contorno.*, Atti Accad. Naz. Lincei, VIII. Ser., Rend., Cl. Sci. Fis. Mat. Nat., 34 (1963), pp. 138–142.

[15] L. Gasinski and N. Papageorgiou, *Nonsmooth Critical Point Theory and Nonlinear Boundary Value Problems*, Mathematical Analysis and Applications, CRC Press, 2004.

[16] Y. Jabri, *The Mountain Pass Theorem: Variants, Generalizations and Some Applications*, Encyclopedia of Mathematics and its Applications, Cambridge University Press, 2003.

[17] A. Kristály, V. Radulescu, and C. Varga, *Variational Principles in Mathematical Physics, Geometry, and Economics: Qualitative Analysis of Nonlinear Equations and Unilateral Problems*, Encyclopedia of Mathematics and its Applications, Cambridge University Press, 2010.

[18] J. D. Logan, M. R. Petersen, and T. S. Shores, *Numerical study of reaction-mineralogy-porosity changes in porous media*, Applied Mathematics and Computation, 127 (2002), pp. 149–164.

[19] C. Michel and M. Lue, *Asymptotic behaviour of some nonlocal diffusion problems*, Applicable Analysis, 80 (2001), pp. 279–315.

[20] P. Rabinowitz, *Some minimax theorems and applications to nonlinear partial differential equations*, In Nonlinear Analysis: A collection of papers in honor of Erich H. Rothe, L. Cesari, R. Kannan and H.F. Weinberger (eds.), Academic Press, New York, 1978.

[21] M. Schechter, *The mountain pass alternative*, Adv. Appl. Math., 12 (1991), pp. 91 – 105.

[22] ——, *Linking Methods in Critical Point Theory*, Birkhäuser Boston, 1999.

[23] M. Schechter, B. Bollobas, W. Fulton, A. Katok, F. Kirwan, P. Sarnak, and B. Simon, *An Introduction to Nonlinear Analysis*, Cambridge Studies in Advanced Mathematics, Cambridge University Press, 2004.

[24] L. Simon, *Existence results for strongly nonlinear functional-elliptic problems*, Coll. Math. Soc. J. Bolyai, 62 (1991).

[25] L. Simon, *Application of monotone type operators to parabolic and functional parabolic pde's*, Handbook of differential equations: evolutionary equations, 4 (2008), pp. 267–321.

[26] L. Simon, *Application of monotone type operators to nonlinear PDE's*, ELTE, 2013.

[27] A. L. Skubachevskii, *Elliptic functional differential equations and applications*, vol. 91, Springer Science & Business Media, 1997.

[28] E. Zeidler and L. Boron, *Nonlinear Functional Analysis and its Applications: II/B: Nonlinear Monotone Operators*, Springer New York, 2013.